ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

В.П.Верещагин, А.Н.Кислов,

Ю.Н.Субботин, Н.И.Черных

К ТЕОРИИ УПРУГИХ ВОЛН В НЕОДНОСВЯЗНОМ ТВЕРДОМ ТЕЛЕ

Обосновывается постановка задачи о разрывных волновых движениях в твердом теле. Предполагается, что пространственные и временные масштабы, характерные для рассматриваемых движений и тела (обозначим его B) допускают использование континуальной модели твердого тела и линейной теории упругости.

В линейной теории при изучении движения деформируемого твердого тела исходят из уравнения движения для зависящего от времени t векторного поля смещений

$$\vec{u} = \vec{u}(\vec{x},t) \tag{1}$$

точек тела из их положений в некотором фиксированном состоянии тела s_0, задаваемых радиус-векторами $\vec{x}$, и из линеаризованного уравнения состояния тела.

В декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ с началом в точке O и базисом $\{\vec{l}_1,\vec{l}_2,\vec{l}_3\}$ эти уравнения выражаются формулами

$$\rho\ddot{u}_j = \sum_{k=1}^{3}\sigma_{jk,k} + f_j, \quad j = 1,2,3, \tag{2}$$

$$\sigma_{jk} = \sum_{m,n=1}^{3} C_{jkmn}\varepsilon_{mn}, \quad j,k = 1,2,3, \tag{3}$$

где ρ − плотность тела; $u_j, \sigma_{jk}, f_j, C_{jkmn}, \varepsilon_{mn} = (u_{m,n} + u_{n,m})/2$ − компоненты вектора смещения $\vec{u}$, тензора напряжений $\hat{\sigma}$, вектора плотности $\vec{f}$ внешних объемных сил, действующих на тело, тензора упругих модулей $\hat{C}$, линеаризованного тензора деформации $\hat{\varepsilon}$. В формулах (2) и (3) для сокращения записи производная по времени t обозначается точкой, а частная производная $\partial(\ldots)/\partial x_k$ − как $(\ldots)_{,k}$.

Плотность ρ и компоненты C_{jkmn} тензора упругих модулей – заданные постоянные величины, причем последние обладают свойствами симметрии

$$C_{jkmn} = C_{mnjk} = C_{kjmn} = C_{jknm}.$$

Когда тело B односвязно, то непрерывность (сплошность) его в состоянии s_t, соответствующем моменту времени t, имеет место, если поле смещений (1) однозначно и непрерывно дифференцируемо. Однако не всякому тензорному полю

$$\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}(\vec{x},t), \tag{4}$$

однозначному и непрерывно дифференцируемому, соответствует однозначное и непрерывно дифференцируемое поле (1), связанное с ним соотношениями

$$u_{m,n} + u_{n,m} = 2\varepsilon_{m,n}, \quad m,n = 1,2,3.$$

Для этого необходимо, а в случае односвязного тела и достаточно[1], чтобы поле (4) удовлетворяло уравнениям совместности, которые можно выразить как в тензорной

$$\operatorname{rot}\left((\operatorname{rot}\hat{\varepsilon})^*\right) = 0, \tag{5a}$$

так и скалярной форме

$$\left(\operatorname{rot}\left((\operatorname{rot}\hat{\varepsilon})^*\right)\right)_{ji} = \sum_{r,k=1}^{3} \delta_{irk} \sum_{n,m=1}^{3} \delta_{jnm}\varepsilon_{km,rn} = 0, \quad j,i = 1,2,3, \tag{5b}$$

где надстрочный символ «*» означает транспонирование; $\delta_{irk}, \delta_{jnm}$ – символы Леви-Чивиты, $\operatorname{rot}\hat{\varepsilon}$ имеет компоненты

$$(\operatorname{rot}\hat{\varepsilon})_{kj} = \sum_{n,m=1}^{3} \delta_{jnm}\varepsilon_{km,n}.$$

Соответствие $\hat{\varepsilon} \to \vec{u}$ при $\hat{\varepsilon}$ (4), удовлетворяющем уравнениям совместности, устанавливается формулами Чезаро [1] и может быть представлено в виде

$$\vec{u}(\vec{x},t) = \vec{u}(\vec{x}_0,t) + \left[\vec{\varphi}(\vec{x}_0,t), \vec{x}-\vec{x}_0\right] + \\ + \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} \left\{\hat{\varepsilon}(\vec{x}',t)d\vec{x}' + \left[\vec{x}'-\vec{x}, (\operatorname{rot}\hat{\varepsilon}(\vec{x}',t))^* d\vec{x}'\right]\right\}, \tag{6}$$

для каждого момента времени t, где $\vec{x}_0$ и $\vec{x}$ – радиус-векторы некоторой фиксированной и текущей точек области D, занимаемой телом в состоянии s_0; $\vec{\varphi}(\vec{x}_0,t)$ – вектор аксиального поля

$$\vec{\varphi} = \vec{\varphi}(\vec{x},t)$$

---

[1] Детальное рассмотрение этого вопроса применительно к односвязным телам и телам произвольной связности см. в [1] – [3].

упругих поворотов, определяемого через поля (1) и (4) соответственно формулами

$$\vec{\varphi}=\frac{1}{2}\operatorname{rot}\vec{u},$$

$$\vec{\varphi}(\vec{x},t)=\vec{\varphi}(\vec{x}_0,t)+\int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}}\left(\operatorname{rot}\hat{\varepsilon}(\vec{x}',t)\right)^{*}d\vec{x}',$$

символ $[\vec{a},\vec{b}]$ означает векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$; $\vec{x}'$ – радиус-вектор текущей точки на пути интегрирования, соединяющем точки $\vec{x}_0$ и $\vec{x}$.

В случае неодносвязного тела B, занимающего n-связную область D, поле смещений (1), соответствующее полю (4), однозначному, непрерывно дифференцируемому и удовлетворяющему уравнениям совместности (5), определяется однозначно формулой (6) в односвязной области

$$D\setminus\bigcup_{k=1}^{n-1}S_k, \tag{7}$$

полученной из D с помощью системы $S_1,S_2,\dots,S_{n-1}$ непересекающихся двусторонних барьеров (разрезов), но может испытывать скачок при переходе через любой из барьеров S_k, $k=1,2,\dots,n-1$. Исходя из формулы (6) и теоремы Вейнгаартена [5] (см. также [2]), скачок $\vec{u}$ можно выразить формулами

$$\vec{u}^{(+)}(\vec{x},t)-\vec{u}^{(-)}(\vec{x},t)=\vec{b}_k(t)+\left[\vec{d}_k(t),\vec{x}\right] \quad \text{на} \quad S_k, \tag{8}$$

$$\vec{b}_k(t)=\oint_{C_k}\left\{\hat{\varepsilon}(\vec{x}',t)d\vec{x}'+\left[\vec{x}',(\operatorname{rot}\hat{\varepsilon}(\vec{x}',t))^{*}d\vec{x}'\right]\right\}, \tag{9a}$$

$$\vec{d}_k(t)=\vec{\varphi}^{(+)}(\vec{x},t)-\vec{\varphi}^{(-)}(\vec{x},t)=\oint_{C_k}(\operatorname{rot}\hat{\varepsilon}(\vec{x}',t))^{*}d\vec{x}', \tag{9b}$$

и рассматривать его как зависящее от времени жесткое смещение сторон барьера (сдвиг на вектор $\vec{b}_k$ в сочетании с малым поворотом $\vec{d}_k$ вокруг начала координат) относительно друг друга при зависящем от времени поле (4), где $\vec{x}$ – радиус-вектор текущей точки на S_k, а C_k – произвольный нестягиваемый контур, пересекающий только барьер S_k и ориентированный от отрицательной S_k^- и положительной S_k^+ стороне S_k. Подынтегральные выражения в (9) непрерывны при переходе через барьер S_k, поэтому векторы $\vec{b}_k$, $\vec{d}_k$ не зависят от выбора барьера S_k.

Теорема Вейнгаартена позволяет рассматривать поле смещений либо как однозначное и разрывное на барьерах в односвязной области (7), либо как многозначное в многосвязной области D без барьеров. В последнем случае вектор смещений можно вновь представить с помощью (6), но интеграл в (6) зависит, вообще говоря, от пути интегрирования в D, а многозначность $\vec{u}$ определяется с помощью формулы (8) векторами $\vec{b}_k$ и $\vec{d}_k$.

Деформированные состояния неодносвязных тел, характеризуемые полями деформаций класса C^2 и полями смещений, имеющими разрывы при пересечении некоторых поверхностей, впервые рассматривались Вольтера [5] и называются дисклокациями Вольтера [6].

С помощью дисклокаций Вольтера описываются реальные состояния неодносвязных твердых тел с внутренними напряжениями. Последние возникают в результате жесткого перемещения берегов каждого из разрезов с последующим восстановлением сплошности тела и характеризуются ненулевыми напряжениями в отсутствие внешних сил.

Поле смещений $\vec{u}$ в таком состоянии можно определить как однозначное векторное поле класса C^3 на $D\setminus\bigcup\limits_{k=1}^{n-1}S_k$, испытывающее скачки при пересечении каждой поверхности S_k, равные относительным смещениям ее берегов, а поле деформаций $\hat{\varepsilon}$, соответствующее $\vec{u}$, непрерывно при пересечении поверхностей S_k и продолжение (по непрерывности) $\hat{\varepsilon}$ на D принадлежит классу C^2.

Поле смещений, соответствующее дисклокации Вольтера, не изменяется со временем, так как относительные смещения берегов разрезов, порождающие состояние с внутренними напряжениями и отождествляемые со скачками поля смещений, в модели Вольтера предполагаются не зависящими от времени.

Однако ничто не мешает отказаться от этого предположения. Действительно, ни последовательность операций, посредством которых реализуется дислокация Вольтера (см. [5], а также [2], [6]), ни формулы (8), (9), определяющие скачок $\vec{u}$, не накладывают ограничений, исключающих зависимость внутренних напряжений и поля смещений от времени. Это обстоятельство, а также связь между дислокациями в кристаллах, существенным образом влияющими на физическое и механическое поведение кристаллических материалов и дислокациями Вольтера, (см., например, [2]) оправдывают интерес к изучению волновых движений в твердом теле, свободном от внешних объемных и поверхностных сил, но с внутренними напряжениями, происхождение которых обусловлено относительными смещениями берегов разреза, изменяющихся со временем по известному закону, используя для описания этих волновых движений уравнения (2), (3). Указанный закон устанавливается формулой (8) при условии, что $\vec{b}_k$ и $\vec{d}_k$ – произвольно задаваемые допустимые функции. Кроме того, уравнения (2), (3) следует дополнить равенствами $\vec{f}=0$

в D и $\hat{\sigma}\vec{n}=0$ на Σ, где Σ – граница D, а $\vec{n}$ – внешняя нормаль к Σ, поскольку тело B предполагается свободным от внешних сил.

Таким образом, возникает задача нахождения и исследования свойств решений уравнений

$$\rho\frac{d^2}{dt^2}u_j=\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}\sigma_{jk},$$

$$\sigma_{jk}=\sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3}C_{jkmn}\frac{\partial}{\partial x_n}u_m,$$

принадлежащих классу C^3 в $D\setminus\bigcup_{k=1}^{n-1}S_k$ с начальными и граничными условиями

$$\hat{\sigma}\vec{n}\big|_{\Sigma}=0 \quad \text{для любого} \quad t\geq 0,$$

$$\vec{u}^{(+)}(\vec{x},t)-\vec{u}^{(-)}(\vec{x},t)=\vec{b}_k(t)+\left[\vec{d}_k(t),\vec{x}\right] \quad \text{на} \quad S_k,$$

$$\frac{d}{dt}u_j\bigg|_{t=0}=v_j(\vec{x}).$$

Здесь $\vec{b}_k(t)$, $\vec{d}_k(t)$ и $v_j(\vec{x})$ – произвольно задаваемые допустимые функции.

Библиографический список

1. Cesaro E., R.C.Accad. Sci. Fis. Math. Napoli. 1906. V.12.
2. Теодосиу К. Упругие модели дефектов в кристаллах. М., 1985.
3. Хан Х. Теория упругости. М., 1988.
4. Weingarten G. Atti Accad. Lincei Rend. 1901. V.10, № 5.
5. Volterra V. Ann. Ėcole Norm. Sup. 1907. V.24, № 3.
6. Ляв А. Математическая теория упругости. М., Л., 1935.